

# PC\* 1 : Programme de colles de mathématiques n°3

Semaine du 07 octobre 2024 au 12 octobre 2024

## Réduction

### Questions de cours

- Un nombre fini d'espaces propres sont en somme directe (démonstration).
- Polynôme caractéristique d'un induit. Inégalité  $\dim E_\lambda(u) \leq \omega(\lambda)$ . (Démonstration)
- Théorème de diagonalisation :  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \iff \dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u) \iff \chi_u$  scindé et  $\dim E_\lambda(u) = \omega_\lambda(u)$  pour tout  $\lambda \in Sp(u) \iff$  il existe une base de  $E$  de vecteurs propres de  $u$  (Démonstration).
- Caractérisation des endomorphismes diagonalisables en termes de polynômes annulateurs scindés, racines simples. Application à un induit.
- Théorème de trigonalisation (Démonstration).

### Le programme

#### B - Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

La réduction des endomorphismes et des matrices carrées permet d'approfondir les notions étudiées en première année.

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux points de vue suivants :

- l'aspect géométrique (sous-espaces stables, éléments propres);
- l'aspect algébrique (utilisation de polynômes annulateurs).

L'étude des classes de similitude est hors programme ainsi que la notion de polynôme minimal.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Éléments propres

Droite stable par un endomorphisme.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre d'un endomorphisme.

Spectre d'un endomorphisme en dimension finie.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe.

Si un polynôme  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres  $u(x) = \lambda x$ .

Si  $u$  et  $v$  commutent, les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

Notation  $Sp(u)$ .

La notion de valeur spectrale est hors programme.

Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

Équation aux éléments propres  $AX = \lambda X$ .

**b) Polynôme caractéristique**

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Les valeurs propres d'un endomorphisme de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Multiplicité d'une valeur propre. Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations  $\chi_A, \chi_u$ .

Coefficients de degrés 0 et  $n - 1$ .

Spectre complexe d'une matrice carrée réelle.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

La démonstration n'est pas exigible.

**c) Diagonalisation en dimension finie**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à  $E$ .

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à sa multiplicité.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Exemple des projecteurs et des symétries.

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique scindé à racines simples.

Traduction matricielle.

**d) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs**

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement s'il admet  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  pour polynôme annulateur.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

**e) Trigonalisation en dimension finie**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Interprétation en termes d'endomorphisme.

La démonstration n'est pas exigible.

Traduction matricielle.

## CONTENUS

Toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.

## CAPACITÉS & COMMENTAIRES

La technique générale de trigonalisation est hors programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication.

---

---